

חשבון דיפרנציאלי וaintegral א

פרק 8 - משיק ונורמל

תוכן העניינים

1	1. המשיק
3	2. בעיות משיקים
5	3. הנורמל
6	4. זווית שבין שתי עקומות

המשיק

שאלות

1) מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודת $(2,2)$.

ב. $x = -2$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע a .

3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודת $(1,15)$, הוא 3.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודת $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$$

לכל ערך k כזו מצאו את נקודת ההשקה.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 3$ ו- $x = -1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א', עם הכיוון החובי של ציר ה- x .

$$(8) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}.$$

מצאו את הנקודות על גраф הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(9) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x^3 - 2x^2 + 5.$$

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגראף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(10) \text{ פונקציה } f(x) \text{ גזירה ברציפות ב- } 0 \text{ ומקיים } f(0) = 0.$$

ידעו שבראשית הזרים הזווית בין המשיק לגראף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

$$\text{חשבו את הגבול} . \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(11) \text{ מצאו את הזווית שיצר המשיק לגראף הפונקציה } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } 17 \text{ ב. } 4$$

$$(2) a = 2$$

$$(3) (1,3)$$

$$(4) a = 2, b = -1$$

$$(5) a = 2, b = -2$$

$$(6) \text{ לערך } x = \frac{1}{3}, k = \frac{158}{27}, \text{ בנקודת } x=1; \text{ לערך } \alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ.$$

$$(7) \text{ א. ראו באתר. ב. } \alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$$

$$(8) x = 5, x = -1$$

$$(9) x = 1, x = \frac{1}{3}$$

$$(10) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(11) \alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$$

בעיות משיקים

שאלות

1) הימש $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

2) הימש $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

3) הימש $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודת $x=0$. מצאו את a ו- c .

4) הימש $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

5) מצאו את המשוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודת $x=e$.

6) מצאו את נקודת המשיק, ואת המשוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

$$(2, -3), \quad y = x^2 - 2x + 1 \quad (6)$$

$$(-3, 1), \quad y = \sqrt{x} \quad (7)$$

8) מצאו את המשוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

9) הפונקציות $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ ו- $y = \frac{1}{x}$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

- 10)** נתון כי f גזירה לכל x .
- הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x - 2)$ גזירה לכל x .
 - הישר $11x + 11 = 2y$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.
מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

1) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

2) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

3) נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

4) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

6) $y = 6x - 15$, $(4,9)$; $y = -2x + 1$, $(0,1)$

7) המשיק $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$, $(9,3)$

8) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$

9) $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

10) א. שאלת הוכחה.
השיפוע הוא 2.

הנוורמל

שאלות

- 1) מצאו את משווהת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3,2)$.
- 2) מצאו את משווהת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו- $(2,4)$.
- 3) משווהת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסויימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

$$y = -2x + 8 \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \quad (2)$$

$$(2,1) \quad (3)$$

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

- 1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y = g(x) = \frac{1}{x}$ ו- $y = f(x) = x^2$.
- 2) מצאו את הזווית בין המרגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולת $x^2 - y^2 = 2$.
- 3) הוכיחו שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

(1) 71.57°

(2) 71.56°

(3) שאלת הוכחה.